

## Persamaan Pembezaan dan Pemodelan Matematik: Aplikasi kepada Kimpalan Geseran

Ahmad Izani Md. Ismail<sup>1</sup>, Hazman Seli<sup>2</sup>, Zainal Arifin Ahmad<sup>3</sup> dan  
Yazariah Mohd Yatim<sup>4</sup>

<sup>1,4</sup>Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, 11800 USM, Pulau Pinang

<sup>2</sup>Fakulti Kejuruteraan Kimia, Universiti Teknologi MARA Sarawak, 94300 Kota Samarahan, Sarawak

<sup>3</sup>Pusat Pengajian Kejuruteraan Bahan & Sumber Mineral, Universiti Sains Malaysia,  
14300 Nibong Tebal, Pulau Pinang

<sup>1</sup>izani@cs.usm.my, <sup>2</sup>hazmanseli@sarawak.uitm.edu.my, <sup>3</sup>srzainal@usm.my, <sup>4</sup>yazariahmy@usm.my

### ABSTRACT

Differential equations are generally used as a basis for mathematical modelling of various physical problems. However, differential equations on their own are of limited use. These equations need to be solved in order to describe the underlying physical phenomena in detail. Mathematical modelling also requires assumptions and approximations so that the model and its solution can provide a reasonably accurate description in an economical manner. In this paper, some basic aspects of differential equations and mathematical modelling are explained and discussed in detail by referring to an industrial process called friction welding.

**Keywords:** Mathematical modelling, partial differential equation, numerical method

### ABSTRAK

Pada umumnya, persamaan pembezaan digunakan sebagai asas bagi pemodelan matematik pelbagai masalah fizikal. Namun, persamaan pembezaan secara tersendiri kurang berguna. Persamaan ini perlu diselesaikan untuk menghuraikan fenomena fizikal dengan terperinci. Pemodelan matematik juga memerlukan andaian dan penghampiran agar model matematik dan penyelesaiannya dapat dihasilkan dengan berekonomi serta memberikan huraian munasabah. Dalam makalah ini, beberapa aspek asas persamaan pembezaan dan pemodelan matematik dihuraikan dan dibincangkan dengan terperinci dengan merujuk kepada suatu proses industri yang disebut kimpalan geseran.

**Kata kunci:** Pemodelan matematik, persamaan pembezaan separa, kaedah berangka

### PENGENALAN

Fenomena fizikal dan bukan fizikal lazimnya melibatkan pemboleh ubah. Pemboleh ubah dapat dikelaskan kepada pemboleh ubah bersandar dan tak bersandar. Sebagai contoh mudah, amaun wang dalam akaun bank seseorang selepas satu tahun simpanan asal akan bergantung kepada kadar faedah bank (sekiranya tiada tambahan atau pengeluaran wang dibuat). Dalam kes ini, pemboleh ubah bersandar ialah amaun selepas satu tahun, manakala pemboleh ubah tak bersandar hanya satu iaitu kadar faedah. Walau bagaimanapun, dalam kebanyakan fenomena fizikal, lebih daripada satu pemboleh ubah tak bersandar diperlukan untuk menerangkan suatu hubungan.

Masalah yang sering kali dihadapi dalam penghuraian fenomena fizikal ialah kesukaran untuk mengenal pasti hubungan terus antara pemboleh ubah bersandar dan pemboleh ubah tak bersandar. Bagaimanapun, hubungan antara kadar perubahan adalah lebih mudah dikenal pasti. Sebagaimana yang telah dipelajari di sekolah, sekiranya  $y$  ialah pemboleh ubah bersandar yang bergantung kepada satu pemboleh ubah tak bersandar  $x$ , kadar perubahan  $y$  terhadap  $x$  dilambang oleh  $dy/dx$  dan disebut sebagai terbitan (atau terbitan peringkat pertama)  $y$  terhadap  $x$ . Untuk menegaskan hal ini, katakan hubungan terus antara  $y$  dan  $x$  ialah  $y = x^2$ . Hal ini lazimnya sukar

dikenal pasti secara terus melalui pemerhatian atau eksperimen. Yang lebih mudah dikenal pasti ialah hubungan kadar  $dy/dx = 2x + C$ , yang mana  $C$  mewakili pemalar. Ini ialah suatu contoh persamaan pembezaan yang dikenali sebagai persamaan pembezaan biasa. Namun, sekiranya hubungan  $dy/dx = 2x + C$  sahaja yang diberi untuk menghuraikan sesuatu proses, tidak banyak maklumat berkenaan proses itu yang dapat diperolehi. Sebaliknya, hubungan terus  $y = x^2$  yang merupakan penyelesaian kepada  $dy/dx = 2x + C$  dapat memberi banyak maklumat. Melalui hubungan ini, nilai  $y$  bagi setiap  $x$  dan nilai minimum bagi  $y$  dapat diketahui. Dalam kes yang lebih umum, lebih banyak maklumat boleh diperolehi yang dapat membantu usaha memahami suatu proses fizikal serta langkah-langkah reka bentuk dan pengoptimuman yang berkaitan.

Fokus makalah ini ialah untuk menerangkan proses pembinaan model matematik menggunakan suatu jenis persamaan pembezaan yang disebut sebagai persamaan pembezaan separa, penyelesaiannya dan kaitannya dengan pemodelan masalah fizikal. Persamaan pembezaan separa melibatkan kadar perubahan pemboleh ubah bersandar terhadap lebih daripada satu pemboleh ubah tak bersandar. Sekiranya  $u$  ialah pemboleh ubah bersandar serta  $x$  dan  $y$  ialah pemboleh ubah tak bersandar, iaitu  $u = u(x, y)$ , maka hubungan kadar  $\partial u/\partial x$  melambangkan terbitan separa  $u$  terhadap  $x$ , dengan  $y$  dianggap malar. Pemodelan matematik merupakan suatu alternatif penting memandangkan terdapat kesukaran dan kelemahan pemodelan fizikal sama ada di lapangan ataupun di makmal. Pelbagai kajian dan manipulasi dapat dilakukan dengan mudah dan cekap menggunakan model matematik (dengan bantuan komputer). Pemodelan matematik amnya melibatkan komputer dengan perisian canggih yang dapat menganalisis data dengan tepat dan cepat.

## PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA DAN PENYELESAIAN

Seperti yang dinyatakan sebelum ini, kebanyakan proses fizikal melibatkan lebih daripada satu pemboleh ubah tak bersandar, dan hubungan antara kadar perubahan (atau dipanggil terbitan separa) lebih mudah dikenal pasti berbanding hubungan terus antara pemboleh ubah. Terbitan separa membawa kepada persamaan pembezaan separa. Persamaan pembezaan separa boleh dikelaskan kepada beberapa kumpulan. Umpamanya, linear, pekali malar, homogen atau tak homogen dan parabolik, hiperbolik atau eliptik. Melalui pengkelasan ini, teknik penyelesaian yang sesuai serta ciri-ciri persamaan dan penyelesaiannya dapat diketahui. Persamaan pembezaan separa juga turut memerlukan syarat-syarat tambahan. Syarat-syarat tambahan ini membolehkan nilai dikira untuk pemalar yang wujud dalam penyelesaian. Bilangan syarat tambahan bergantung kepada peringkat terbitan tertinggi yang wujud dalam persamaan pembezaan separa. Bagi suatu fenomena yang bergantung kepada pemboleh ubah tak bersandar ruang dan masa, syarat tambahan diberi pada permulaan masa  $t = 0$  (dikenali sebagai syarat awal) dan di sempadan domain masalah (dikenali sebagai syarat sempadan) (Fletcher, 1991).

Diketahui bahawa persamaan pembezaan separa seperti  $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = 0$  tidak dapat menerangkan sesuatu fenomena dengan baik. Namun sekiranya persamaan pembezaan tersebut dapat diselesaikan untuk memberi ungkapan terus dan tak tersirat antara  $u$  dengan  $x$  dan  $y$ , pelbagai maklumat dapat diperolehi. Bagaimanapun, dalam keadaan tertentu, keberhasilan menerbitkan persamaan pembezaan separa yang mengawal sesuatu proses fizikal sudahpun boleh dianggap pencapaian yang baik. Kini, sudah terdapat analisis matematik canggih yang boleh mengupas maklumat kualitatif daripada persamaan pembezaan separa tersebut.

Dalam beberapa keadaan, adalah bermanfaat untuk mengetahui sama ada penyelesaian kepada persamaan pembezaan tersebut wujud, unik dan selanjar pada data. Kepentingan kewujudan dan keunikan adalah jelas. Penyelesaian yang selanjar pada data menunjukkan bahawa usikan kecil terhadap data hanya mengakibatkan perubahan kecil kepada penyelesaian.

Hal ini amat penting untuk penyelesaian hampiran, seperti kaedah berangka yang akan dibincangkan seterusnya. Untuk penyelesaian hampiran, sudah pasti akan terdapat usikan terhadap data, maka jaminan diperlukan bagi memastikan penyelesaian yang didapati akan hanya berubah sedikit sahaja (Fletcher, 1991).

## **KAEDAH BERANGKA**

Sebaik-baiknya penyelesaian kepada model matematik (persamaan pembezaan dan syarat tambahan) adalah dalam bentuk rumus yang menghubungkan terus pemboleh ubah bersandar dengan pemboleh ubah tak bersandar. Penyelesaian ini disebut penyelesaian analisis tepat dan kaedah yang digunakan disebut kaedah analisis tepat. Sebagai contohnya, pertimbangkan model matematik yang diwakili oleh persamaan pembezaan biasa  $dy/dx = 2x$  dengan syarat awal  $y(0) = 1$ . Penyelesaian analisis tepatnya ialah  $y = x^2 + 1$  kerana ia memenuhi persamaan pembezaan dan syarat awal tersebut. Namun begitu, bagi kebanyakan masalah fizikal adalah amat sukar atau mustahil untuk memperoleh penyelesaian analisis tepat. Hal ini disebabkan perkara-perkara seperti ketidaklinearan, pekali pemboleh ubah atau syarat tambahan yang rumit dalam model matematik.

Sebagai alternatif, kaedah berangka boleh digunakan untuk menghasilkan penyelesaian berangka. Penyelesaian berangka adalah dalam bentuk nombor/angka. Perisian komputer boleh menjelmakan nombor-nombor ini menjadi rajah dan pelbagai maklumat tentang proses fizikal boleh diperolehi. Salah satu kaedah berangka yang popular ialah kaedah beza terhingga. Prinsip utama kaedah ini ialah membahagikan domain masalah kepada bahagian-bahagian tertentu dan menggantikan terbitan di bucu bahagian (titik grid) dengan beza terhingga. Sebagai contoh,  $dy/dx \rightarrow (y(x+h) - y(x))/h$  yang mana  $h$  ialah saiz langkah atau saiz grid dalam arah  $x$ . Melalui cara yang disebut sebagai proses pendiskretan ini, persamaan pembezaan berubah menjadi persamaan beza. Secara teorinya, persamaan beza adakalanya lebih mudah diselesaikan menggunakan teknik-teknik yang dipelajari di sekolah. Terdapat beberapa perkara yang perlu diketahui berkenaan penyelesaian berangka. Antaranya:

1. Penyelesaian berangka tidak akan diperolehi pada semua lokasi tetapi hanya pada lokasi tertentu yang disebut sebagai lokasi grid. Nilai pada lokasi lain perlu diperolehi melalui proses interpolasi (iaitu suatu proses purata). Di samping itu, penyelesaian berangka mempunyai ralat disebabkan proses pendiskretan dan ralat disebabkan pembulatan komputer.
2. Stabiliti, konsistensi dan penumpuan: Ketidakstabilan secara kasar bermaksud penyelesaian akan berayun, menjadi tak terbatas dan lama-kelamaan komputer yang melaksanakan pengiraan akan terhenti pelaksanaannya kerana nombor yang dijana terlalu besar. Hal ini amat relevan dalam penyelesaian berangka suatu model matematik masalah fizikal yang bergantung kepada masa. Konsistensi bermaksud skema beza terhingga akan menghampiri persamaan pembezaan apabila saiz grid menghampiri sifar. Ia penting bagi memastikan skema memimik persamaan yang hendak diselesaikan. Penumpuan pula bermaksud penyelesaian skema beza terhingga akan menumpu kepada penyelesaian persamaan pembezaan apabila saiz grid menghampiri sifar. Penumpuan memberi jaminan bahawa sekiranya saiz grid dikecilkan, maka penyelesaian berangka yang diperolehi lebih jitu.

Bagi memastikan kestabilan, saiz langkah masa perlu dihadkan dalam sesetengah skema beza terhingga untuk masalah fizikal tak mantap. Konsistensi lazimnya dicapai oleh pendiskretan yang digunakan. Penumpuan, dalam keadaan tertentu, adalah terjamin jika skema tersebut stabil

dan konsisten. Lantaran itu, perkara yang paling penting dalam kaedah berangka ialah kestabilan. Lebih-lebih lagi jika penyelesaian yang diperlukan ialah penyelesaian kasar yang tidak begitu mementingkan kejituan bagi memahami asas-asas masalah fizikal.

## LANGKAH-LANGKAH PEMODELAN MATEMATIK

Dalam bahagian ini, model matematik yang ingin diselesaikan diandaikan mempunyai penyelesaian wujud, unik dan selanjar pada data. Terdapat beberapa langkah dalam pemodelan matematik iaitu:

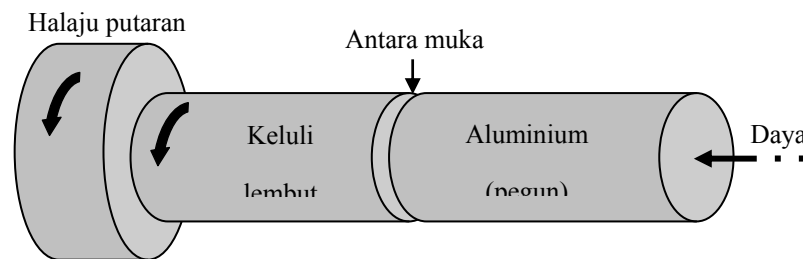
1. **Analisis dan pemodelan:** Persamaan pembezaan atau persamaan menakluk yang mengawal proses fizikal beserta syarat-syarat tambahan perlu dikenal pasti dan diterbitkan. Persamaan menakluk bagi masalah fizikal sering kali boleh diperoleh daripada prinsip-prinsip keabadian yang berkaitan seperti prinsip keabadian tenaga, momentum atau jisim. Bagi memastikan persamaan menakluk dapat diselesaikan dengan cekap, persamaan itu boleh cuba dipermudahkan dan penghampiran tertentu dibuat. Pandangan pakar dalam bidang fizikal sewajarnya diperoleh memandangkan ahli matematik mungkin tidak begitu mahir dengan aspek-aspek fizikal.
2. **Pemilihan kaedah penyelesaian:** Kaedah penyelesaian khusus yang ingin diguna perlu dikenal pasti. Sekiranya kaedah beza terhingga ingin digunakan, sistem grid dan saiz grid yang bersesuaian perlu ditentukan.
3. **Penentusahan:** Dalam langkah ini, model matematik diuji menggunakan data sampel dan keputusan munasabah seharusnya diperoleh. Sekiranya data sampel diusik sedikit, keputusan seharusnya berubah sedikit sahaja. Hal ini bagi memastikan model matematik dan kaedah penyelesaian yang ingin digunakan berada pada landasan yang betul.
4. **Pengesahan:** Model matematik dan kaedah penyelesaian diuji dengan mengaplikasikannya kepada keadaan yang hampir serupa yang diketahui penyelesaian tepat atau hampirannya. Model juga boleh disahkan melalui perbandingan dengan data eksperimen/pemerhatian. Sekiranya penyelesaian berangka dan data eksperimen menunjukkan persetujuan yang baik, ia memberi keyakinan bahawa model matematik dan kaedah penyelesaian tersebut adalah sah.
5. **Penentukuran:** Adakalanya nilai bagi parameter tertentu dalam model matematik perlu dipilih daripada satu julat. Dalam langkah ini, nilai yang paling sesuai untuk sesuatu parameter dikenal pasti berdasarkan penyelesaian model matematik yang disahkan.
6. **Model dilaksanakan dalam mod ramalan (*predictive mode*):** Sekiranya model matematik agak piawai, langkah 3, 4 dan 5 mungkin tidak perlu dilakukan dan model itu boleh dilaksanakan dalam mod ramalan. Sistem terbenam (*embedded system*) kini memainkan peranan penting. Sensor dalam sistem ini mampu mengutip data seperti suhu, halaju atau cahaya. Data-data ini boleh disimpan dan dianalisis dan dengan cara ini model dapat diperbaiki. Sekiranya kutipan data dapat dibuat dalam masa nyata, kemudian dihantar untuk dianalisis melalui internet dan model matematiknya dapat dilakukan dengan pantas serta maklumat yang didapati dikembalikan semula melalui internet, kecekapan peralatan dalam situasi pelaksanaan dapat ditingkatkan.

## KAJIAN KES

Untuk memahami bagaimana model matematik dapat menghuraikan suatu fenomena/proses fizikal, suatu proses industri yang dikenali sebagai kimpalan geseran akan dikaji berdasarkan beberapa langkah yang telah dibincangkan dalam bahagian sebelum ini.

### Pengenalan

Kimpalan geseran ialah proses menggabungkan bahan serupa dan bahan tak serupa dengan keutuhan gabungan yang tinggi. Proses ini digunakan secara meluas dalam industri pembuatan dan industri-industri perkilangan yang lain. Gabungan bahan-bahan terhasil daripada kesan tekanan beserta gerakan relatif kedua-dua bahan kerja yang menghangatkan antara muka dan menyebabkan bahan-bahan tersebut mengalami ubah bentuk (deformasi) plastik. Seli *et al.* (2010) telah mengkaji proses kimpalan geseran pacuan berterusan (*continuous drive friction welding*) iaitu suatu proses kimpalan yang terjadi akibat gerakan putaran bahan kerja diberhentikan selepas tekanan dikenakan dalam jangka masa yang amat singkat. Rod aluminium dan rod keluli lembut telah digunakan dalam kajian ini. Skema proses kimpalan ini ditunjukkan dalam Rajah 1 dan dihuraikan dengan lebih terperinci oleh Seli *et al.* (2010).



**Rajah 1:** Skema proses (diubahsuai daripada Seli *et al.* (2010))

Semasa proses geseran, haba geseran dijana pada antara muka sehingga menyebabkan ubah bentuk plastik dicapai dengan cepat. Putaran diberhentikan untuk mengizinkan bahagian yang dikimpal itu sejuk. Pengetahuan berkenaan taburan suhu di sekitar bahagian yang dikimpal adalah signifikan dalam menilai proses fizikal di kawasan itu. Justeru adalah penting untuk menganggar suhu puncak di kawasan kimpalan dengan cepat dan jitu serta menganggar kadar penyejukan bahan.

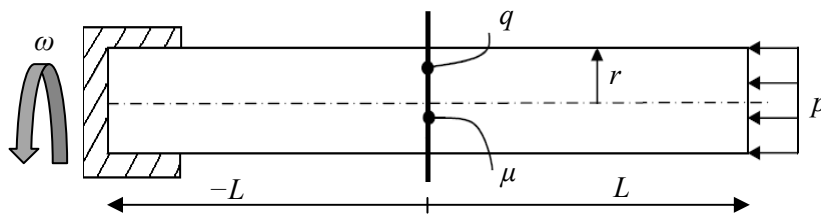
### Analisis dan Pemodelan Matematik

Andaian perlu dibuat untuk memudahkan pembangunan model matematik dan ia dibuat sedemikian rupa supaya inti pati masalah dapat dikekalkan serta penyelesaian yang diperolehi tidak akan berbeza secara signifikan daripada yang sebenarnya. Dalam proses kimpalan geseran, andaian-andaian yang telah dibuat adalah:

- Penjanaan haba dan tekanan pada permukaan antara muka adalah seragam.
- Tiada pertukaran haba antara permukaan hujung rod aluminium, rod keluli lembut dan persekitaran.

- Rod aluminium dan keluli lembut bersifat homogen (bahan sama jenis) dan isotropi (sama dalam semua arah).
- Tiada kehilangan haba melalui olakan dan radiasi kerana masa kimpalan amat singkat.
- Tiada sumber haba dalaman bagi kedua-dua rod dan input haba dianggap malar sepanjang proses.

Semasa proses kimpalan, suhu pada kawasan kimpalan meningkat dengan amat cepat disebabkan geseran yang agak ekstrem dan kerja plastik pada bahagian aluminium dalam masa yang singkat. Untuk mengira profil suhu, suatu analisis pemindahan haba telah dibuat oleh Seli *et al.* (2010) dengan mempertimbangkan haba yang dijana oleh geseran pada antara muka, haba yang dijana oleh ubah bentuk plastik dan kehilangan haba kepada persekitaran. Rajah 2 mengilustrasikan parameter-parameter yang terlibat dalam proses ini.



**Rajah 2:** Parameter-parameter yang terlibat dalam proses kimpalan geseran

Fluks haba  $q$  yang dijanakan oleh geseran pada antara muka boleh diungkapkan sebagai

$$q = \mu p \omega r, \quad (1)$$

yang mana  $\mu$  ialah pekali geseran,  $p$  ialah tekanan pada permukaan yang bersentuhan,  $\omega$  ialah halaju sudut dan  $r$  ialah jejari rod. Kuasa ubah bentuk plastik ataupun kadar tenaga dalaman  $\dot{q}$  dalam rod logam luar daripada kawasan antara muka boleh ditakrifkan sebagai

$$\dot{q} = \gamma \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}, \quad (2)$$

yang mana  $\bar{\sigma}$  ialah tegasan setara,  $\dot{\bar{\epsilon}}$  ialah kadar terikan setara dan  $\gamma$  ialah kecekapan terma ubah bentuk plastik.

Secara tegasnya, masalah konduksi haba dalam keseluruhan proses kimpalan geseran ini ialah suatu masalah tiga dimensi tetapi aliran yang dominan adalah dalam satu arah sahaja. Maka, penggunaan model satu dimensi adalah amat jelas dan sudah mencukupi. Berdasarkan prinsip keabadian tenaga, persamaan pembezaan separa berikut diterbitkan (Seli *et al.* (2010)):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{hP}{\rho C_p A} (T - T_o) + \dot{q}, \quad (3)$$

yang mana  $T$  ialah suhu (K),  $x$  ialah jarak dari antara muka (m),  $t$  ialah masa (s),  $u$  ialah halaju pemendekan ( $\text{ms}^{-1}$ ),  $\rho$  ialah ketumpatan bahan ( $\text{kgm}^{-3}$ ),  $C_p$  ialah muatan haba tentu ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ),  $k$  ialah kekonduksian terma ( $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ),  $h$  ialah pekali pemindahan haba ( $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ),  $P$  ialah

perimeter rod (m),  $A$  ialah luas keratan rentas rod ( $m^2$ ) dan  $T_o$  ialah suhu persekitaran di sekeliling rod (K).

Seli *et al.* (2010) menyatakan bahawa kadar tenaga dalaman  $\dot{q}$  boleh diabaikan disebabkan nilainya yang kecil berbanding penjumlahan haba melalui geseran. Halaju pemendekan  $u$  juga boleh dianggap sifar kerana pemendekan tidak begitu signifikan dalam proses ini. Dengan mengambil kira perkara-perkara ini dan menulis  $\alpha = k/\rho C_p$  dan  $\beta = hP/\rho C_p A$ , persamaan (3) dipermudahkan menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta(T - T_o). \quad (4)$$

Masalah konduksi haba dalam proses kimpalan geseran telah dipermudahkan kepada pengiraan medan suhu yang merupakan fungsi ruang (satu dimensi) dan masa. Pengiraan suhu proses kimpalan geseran dijalankan dalam dua peringkat. Peringkat pertama adalah semasa proses pemanasan, manakala peringkat kedua adalah semasa proses penyejukan.

Syarat awal dan syarat sempadan untuk menyelesaikan masalah (4) diungkapkan untuk kedua-dua peringkat ini. Pada peringkat pemanasan, taburan suhu pemanasan dikira secara berasingan untuk dua rod yang sama panjang ( $L$ ) dengan mengandaikan haba purata sepunya dijanakan pada antara muka. Pada peringkat pemanasan, syarat awal bagi persamaan pembezaan separa (4) ialah

$$T(x, t_h) = T_o \text{ bagi } t_h = 0, \quad (5)$$

yang mana  $t_h$  ialah masa pemanasan atau geseran dan  $T_o$  ialah suhu awal spesimen yang diambil sebagai  $29^\circ\text{C}$ . Syarat-syarat sempadan bagi peringkat ini ialah

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q \text{ pada } x = 0 \quad (6)$$

dan

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_o) \text{ pada } x = L \quad (7)$$

bagi  $t_h > 0$ . Pada peringkat penyejukan pula, kedua-dua rod telah bergabung dan dianggap sebagai satu rod baharu ( $2L$ ). Syarat awal bagi persamaan (4) pada peringkat ini ialah

$$T(x_j, t_c) = T_n \text{ bagi } t_c = 0, \quad (8)$$

yang mana  $x_j$  ialah jarak dari sisi kiri rod yang digabungkan,  $t_c$  ialah masa penyejukan dan  $T_n$  ialah profil suhu terakhir daripada peringkat pemanasan dengan langkah masa terakhir  $n$ . Syarat-syarat sempadan bagi peringkat ini ialah

$$k_s \frac{\partial T}{\partial x} = h_s(T_s - T_o) \text{ pada } x_j = 0 \quad (9)$$

dan

$$-k_a \frac{\partial T}{\partial x} = h_a(T_a - T_o) \text{ pada } x_j = 2L \quad (10)$$

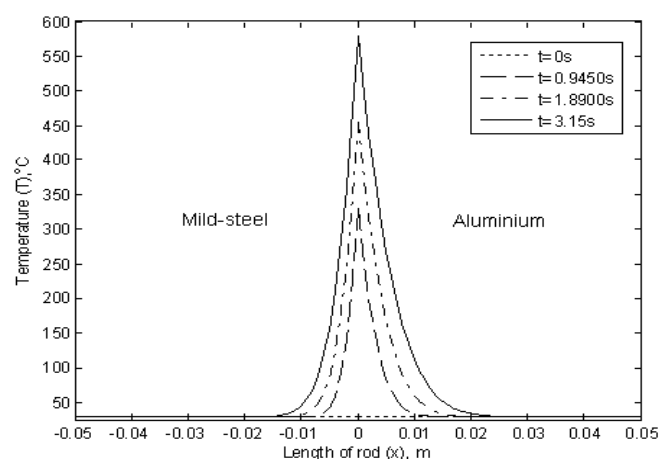
bagi  $t_c > 0$ , dengan subskrip  $a$  dan  $s$  masing masing merujuk kepada aluminium dan keluli lembut.

### Kaedah Berangka

Model matematik ini boleh diselesaikan secara berangka dengan mendiskretkan persamaan pembezaan separa (4) menggunakan kaedah beza terhingga. Kaedah beza kedepan untuk masa, beza pusat untuk ruang (FTCS), yang merupakan kaedah beza terhingga menggunakan beza kedepan untuk  $\partial T/\partial t$  dan beza pusat untuk  $\partial^2 T/\partial x^2$ , telah dipilih bagi menyelesaikan model ini. Adalah diketahui bahawa kaedah FTCS ini konsisten dengan persamaan pembezaan separa asal dan menumpu. Kriteria kestabilan bagi kaedah ini diberi oleh  $\alpha \Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$ , yang mana  $\Delta t$  ialah saiz langkah masa dan  $\Delta x$  ialah saiz langkah ruang. Saiz langkah masa perlu dipilih dengan baik supaya kriteria kestabilan tersebut dipenuhi. Dengan menggunakan kaedah ini, persamaan pembezaan separa (4) diselesaikan tertakluk kepada syarat-syarat (5)-(7) pada peringkat pemanasan, dan syarat-syarat (8)-(10) pada peringkat penyejukan.

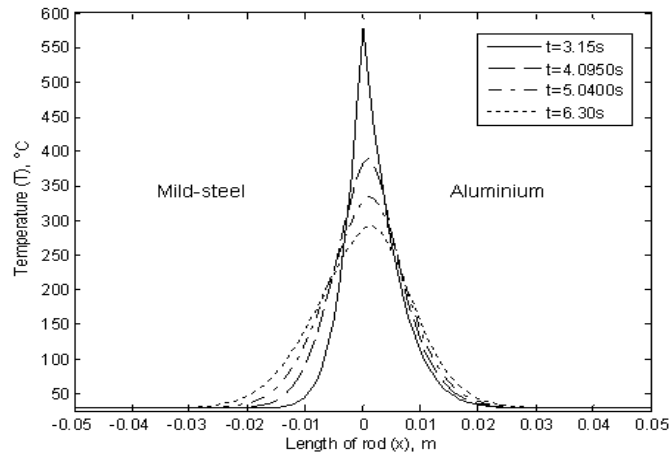
### Pengesahan

Seli *et al.* (2010) juga turut menjalankan eksperimen untuk mengukur suhu di sekitar kawasan kimpalan. Dalam eksperimen ini, rod dengan diameter 10mm diperbuat daripada aluminium (50mm panjang) dan keluli lembut (50mm panjang) telah digunakan. Suhu diukur menggunakan dua pengganding suhu yang diletakkan pada rod aluminium yang tidak berputar dan berada 2mm dan 10mm dari antara muka. Penyelesaian berangka yang meramal taburan suhu semasa proses pemanasan dan penyejukan akan dibandingkan dengan data eksperimen ini bagi tujuan pengesahan.



**Rajah 3:** Taburan suhu pemanasan sehingga 3.15s (daripada Seli *et al.* (2010))



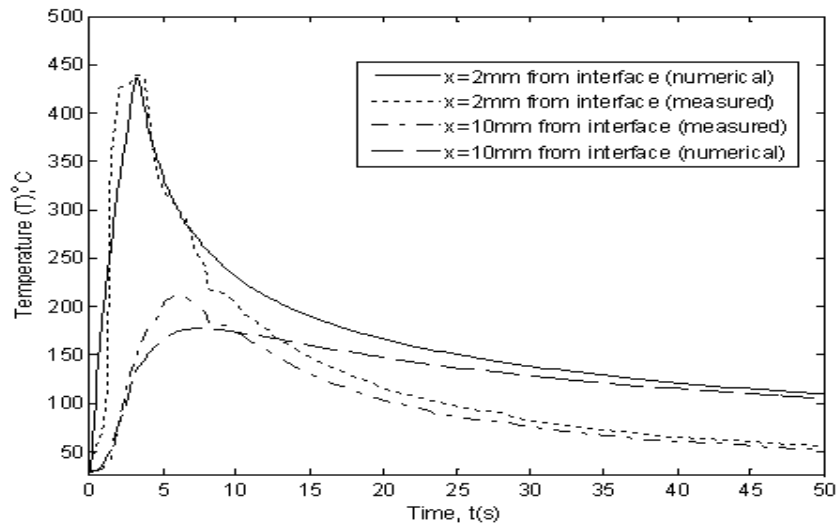


**Rajah4:** Taburan suhu penyejukan selepas 3.15s (daripada Seli *et al.* (2010))

Rajah 3 menunjukkan taburan suhu pemanasan di sekitar kawasan kimpalan pada 0s, 0.945s, 1.89s dan 3.15s. Kawasan antara muka yang terlibat dengan proses geseran mengalami peningkatan suhu yang mendadak. Berdasarkan penyelesaian berangka Seli *et al.* (2010), suhu pemanasan puncak ialah 568°C dan dicapai pada masa  $t = 3.15s$ . Kecerunan suhu yang curam menunjukkan julat kawasan yang mengalami pemanasan adalah kecil dalam tempoh ini. Profil suhu yang diramal menunjukkan lengkung tak simetri pada kedua-dua sisi rod yang dikimpal disebabkan oleh sifat-sifat terma bahan yang berbeza. Profil suhu pada bahagian rod aluminium didapati lebih lebar berbanding pada bahagian rod keluli lembut disebabkan nilai kekonduksian terma aluminium yang lebih tinggi dan ini membantu mempercepatkan proses pemindahan haba.

Taburan suhu penyejukan pada 3.15s, 4.095s, 5.04s dan 6.3s ditunjukkan dalam Rajah 4. Peringkat penyejukan bermula selepas 3.15s iaitu selepas suhu pemanasan puncak dicapai. Rajah 4 menunjukkan bahawa profil suhu penyejukan berbeza daripada profil suhu pemanasan. Dengan pertambahan masa, suhu mengalami penurunan di kawasan yang hampir dengan antara muka ( $-5mm < x < 7mm$ ), manakala di luar kawasan tersebut suhu didapati meningkat di kedua-dua bahagian rod disebabkan proses pemindahan haba yang berlaku. Rebakan haba ke hujung rod dapat diperhatikan dan membuatkan profil suhu yang lebih rendah menjadi lebih lebar (Seli *et al.*, 2010).

Rajah 5 menunjukkan profil suhu-masa yang diukur melalui eksperimen dan dikira melalui kaedah berangka pada lokasi 2mm dan 10mm dari antara muka. Secara amnya, taburan suhu yang diramalkan oleh model tidak sama dengan data eksperimen terutamanya pada peringkat penyejukan. Walau bagaimanapun, trend kedua-dua profil suhu tersebut adalah serupa. Pada  $t = 3.15s$ , suhu pemanasan yang dikira pada lokasi  $x = 2mm$  dari antara muka ialah 434°C. Didapati bahawa suhu masih meningkat sehingga 436°C pada 3.244s dan kemudiannya turun perlahan-lahan kepada 292°C selepas 6.3s. Bagi lokasi  $x = 10mm$  dari antara muka, suhu yang dikira ialah 112°C pada  $t = 3.15s$ . Terdapat perbezaan yang amat ketara antara suhu yang didapati daripada penyelesaian berangka dengan data eksperimen selepas  $t = 10s$  bagi kedua-dua lokasi, dengan suhu yang dikira lebih tinggi berbanding suhu eksperimen (Seli *et al.*, 2010). Setelah melihat percanggahan ini, model matematik ini boleh diperbaiki. Antaranya, mungkin dengan mempertimbangkan semula andaian-andaian yang dibuat sebelum ini atau dengan mengambil kira keadaan keseluruhan bahan kerja dalam pembangunan model matematik.



**Rajah 5:** Profil suhu-masa pada jarak 2mm dan 10mm dari antara muka kimpalan bagi penyelesaian berangka dan data eksperimen (daripada Seli *et al.* (2010))

Berdasarkan langkah pengesahan yang dilakukan, walaupun model matematik yang dibangunkan amat mudah dan ringkas, ia mampu menerangkan proses kimpalan geseran dengan agak baik. Sekiranya keputusan yang lebih jitu diperlukan, beberapa perubahan dan penambahbaikan perlu dilakukan terhadap model matematik tersebut atau kepada kaedah penyelesaian berangka yang digunakan.

## KESIMPULAN

Pemodelan matematik adalah penting dalam memahami pelbagai fenomena fizikal memandangkan pemodelan fizikal mempunyai kelemahannya yang tersendiri. Bagaimanapun, untuk memperoleh persamaan pembezaan yang mengawal sesuatu fenomena bukanlah suatu perkara mudah. Oleh itu, proses menerbitkan persamaan pembezaan dan proses penyelesaiannya memerlukan pengetahuan berkenaan fenomena fizikal agar penghampiran atau pemudahan yang perlu dibuat tidak menjejaskan keupayaan model untuk membuat ramalan. Terdapat langkah-langkah yang wajar diikuti dalam proses pembangunan model matematik dan penyelesaian model tersebut. Hal ini adalah supaya proses pembangunan dan penyelesaian model yang didapati lebih tersusun dan sistematik. Beberapa langkah atau tatacara pemodelan matematik yang diuraikan dalam makalah ini telah diaplikasikan kepada proses kimpalan geseran.

## RUJUKAN

- Fletcher, C. A. J. (1991) *Computational Techniques for Fluid Dynamics I*, Berlin: Springer-Verlag.
- Seli, H., Md. Ismail, A. I., Rachman, E. dan Ahmad, Z. A. (2010) Mechanical evaluation and thermal modelling of friction welding of mild steel and aluminium, *Journal of Materials Processing Technology*, 210, 1209–1216.

## RUJUKAN AM

- Farlow, S. J. (1982) *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, New York: John Wiley & Sons.
- Keane, M. K. (2002) *A Very Applied First Course in Partial Differential Equations*, New Jersey: Prentice Hall.
- Li, J. dan Chen, Y-T. (2009) *Computational Partial Differential Equations using MATLAB®*, Boca Raton: CRC Press.
- Md. Ismail., A. I. (2014) *Persamaan Pembezaan Separa: Penyelesaian dan Aplikasi*, Pulau Pinang: Penerbit USM.